

## TAREA 1:

Determinar el espacio del plano 's' en el que se encuentran los polos de un sistema que tiene un tiempo de asentamiento inferior a 10 segundos y una sobre-elongación superior al 80 %. Proponer un sistema continuo de tercer orden que cumpla las especificaciones elegidas y que en el estacionario, frente a la entrada escalón alcance un valor de 10. Simular y comprobar que se cumplen las especificaciones del sistema elegido.

Para empezar comenzamos a realizar cálculos para obtener un sistema de segundo orden con los datos proporcionados (tiempo de asentamiento inferior a 10 segundos y sobre-elongación superior a 80%).

Primero con el valor de sobre-elongación, obtenemos el valor de  $\zeta$  a través de la siguiente formula:

$$M_P = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \rightarrow \ln(M_P) = -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{1-\zeta^2} * \ln(M_P) = -\zeta\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow (1-\zeta^2) * (\ln(M_P))^2 = \zeta^2 * \pi^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\ln(M_P))^2 - \zeta^2 * (\ln(M_P))^2 = \zeta^2 * \pi^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\ln(M_P))^2 = \zeta^2 * \pi^2 + \zeta^2 * (\ln(M_P))^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\ln(M_P))^2 = \zeta^2 * [\pi^2 + (\ln(M_P))^2] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(\ln(M_P))^2}{\pi^2 + (\ln(M_P))^2} = \zeta^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \zeta = \frac{\ln(M_P)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(M_P))^2}}$$

Después con la característica del tiempo de asentamiento, obtenemos sigma realizando el siguiente cálculo:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{4}{t_s}$$

Por último, usando la parte real del polo dominante complejo, obtenemos el valor de  $W_n$  del sistema:

$$\text{Polo dominante complejo: } s = -\sigma \pm jw = -\zeta W_n \pm W_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

$$\text{Parte real: } -\sigma = -\zeta W_n \rightarrow \sigma = \zeta W_n \rightarrow W_n = \frac{\sigma}{\zeta}$$

Con los datos obtenidos, procedemos a obtener la función de transferencia

```
4      %% Obtener sistema de segundo orden:
5 -    clear all; clc; close all;
6
7 -    Mp = 0.81;          % Mp > 80%
8 -    dseta = (log(Mp))/(sqrt(pi^2+((log(Mp))^2)));
9
10 -   ts = 9.9;          % ts < 10 s
11 -   sigma = 4/ts;
12 -   Wn = sigma/dseta;
13
14 -   k = Wn^2;
15 -   p = 2*dseta*Wn;
16
17 -   Gs = tf(k,[1,p,k])
18
19 -   figure;
20 -   step(Gs);
21 -   grid on;
22
23 -   stepinfo(Gs)
24 -   Polos = pole(Gs)
25
26 -   figure;
27 -   pzmap(Gs);
```

Figura 1: Código usado para obtener la función de segundo orden con las características propuestas.

```
Gs =
      36.45
-----
s^2 + 0.8081 s + 36.45

Continuous-time transfer function.
```

Figura 2: Función de transferencia obtenida del sistema de segundo orden.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 0.1818  
    SettlingTime: 9.4666  
    SettlingMin: 0.3440  
    SettlingMax: 1.8100  
    Overshoot: 80.9980  
    Undershoot: 0  
    Peak: 1.8100  
    PeakTime: 0.5204
```

Figura 3: Características de la función de transferencia de la Figura 2

Podemos ver las características del sistema en la Figura 3 obtenidos a través del código, e indican que tenemos un tiempo de asentamiento de 9.4666 segundos y un porcentaje de overshoot (sobre-elongación) de 80.998%.

```
Polos =  
  
-0.4040 + 6.0237i  
-0.4040 - 6.0237i
```

Figura 4: Polos de la función de transferencia de la Figura 2

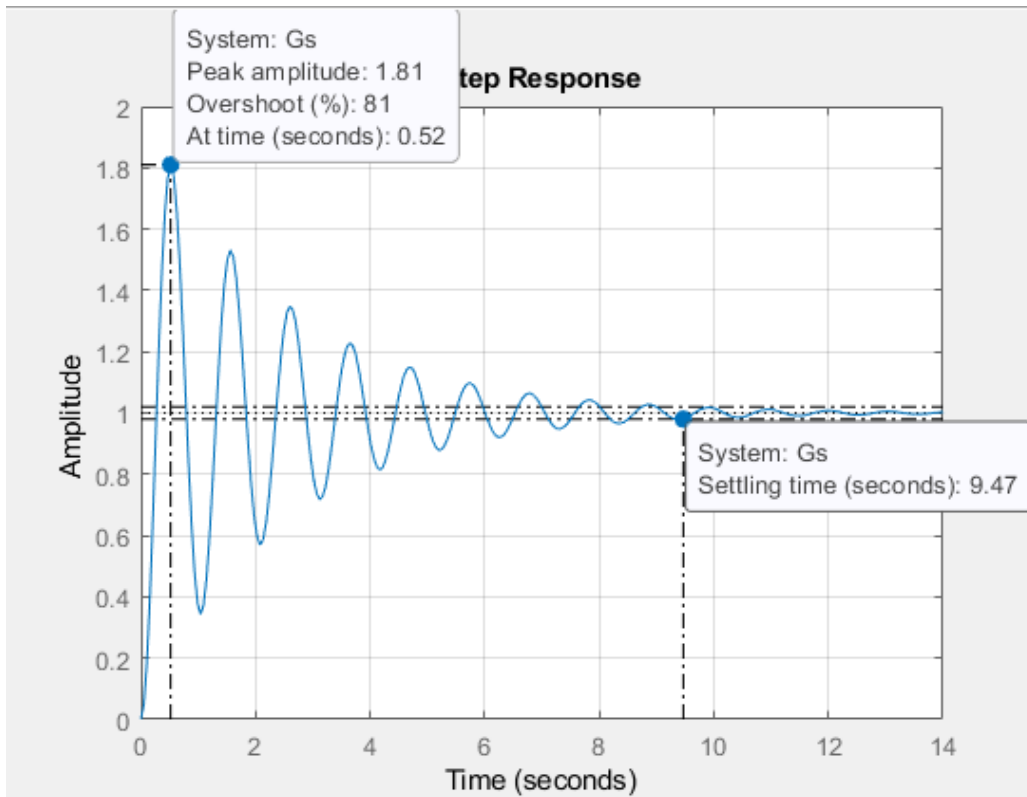


Figura 5: Respuesta a la entrada escalón del sistema obtenido de segundo orden.

## TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

Podemos observar también las características del sistema dentro de la gráfica obtenida a la respuesta de la entrada escalón como se puede observar en la *Figura 5*.

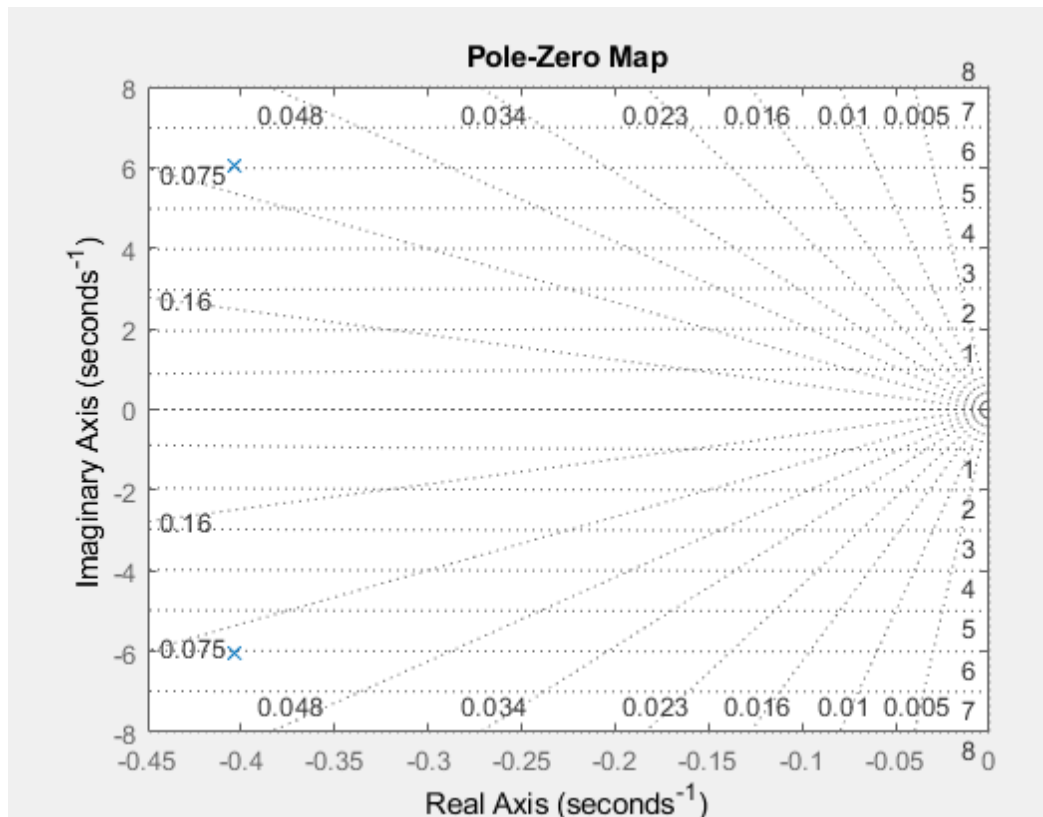


Figura 6: Polos y ceros del sistema obtenido de segundo orden.

Una vez obtenido la función de transferencia de segundo orden, procedemos a introducir un polo simple no dominante. Este polo extra no debe afectar a las características de la función, por lo que el polo ha de estar muy alejado hacia el infinito negativo del eje real.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
29 %% Obtener sistema de tercer orden:
30
31 - syms s;
32 - Gs = 36.45 / (s^2 + 0.8081*s + 36.45);
33
34 % Polos Gs:      -0.4040 + 6.0237i
35 %               -0.4040 - 6.0237i
36
37 % Añadimos un polo real no dominante para obtener un sistema de tercer
38 % orden, y que no afecte a las características proporcionadas por el
39 % enunciado.
40
41 - Gs2 = 1/(100 + s);
42
43 % Polo Gs2:      -100
44 - Gs = Gs*Gs2;
45 - Gs = collect(simplify(Gs))
46 - Gs = tf(364500,[10000 1008081 1172600 36450000])
47
48 % Comprobamos y obtenemos las graficas
49 - figure;
50 - step(Gs);
51 - grid on;
52
53 - stepinfo(Gs)
54 - Polos = pole(Gs)
55
56 - figure;
57 - pzmap(Gs);
```

Figura 7: Código usado para obtener la función de tercer orden con las características propuestas, a través del resultado tras usar el código de la Figura 1

```
Gs =
      364500
-----
10000 s^3 + 1.008e06 s^2 + 1.173e06 s + 3.645e07
Continuous-time transfer function.
```

Figura 8: Función de transferencia obtenida del sistema de tercer orden.

Podemos observar que tenemos un sistema con una función de transferencia de tercer orden y procedemos a observar las características (a través de código y a través de la gráfica).

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 0.1829  
    SettlingTime: 9.4757  
    SettlingMin: 0.0035  
    SettlingMax: 0.0181  
    Overshoot: 80.6666  
    Undershoot: 0  
    Peak: 0.0181  
    PeakTime: 0.5204
```

Figura 9: Características de la función de transferencia de la Figura 8

Las características del tiempo de asentamiento (9.4757 segundos) y overshoot (sobre-elongación = 80.6666 %) están dentro de los rangos proporcionados por el enunciado (tiempo de asentamiento menor de 10 segundos y sobre-elongación mayor del 80%).

```
Polos =  
  
1.0e+02 *  
  
-1.0000 + 0.0000i  
-0.0040 + 0.0602i  
-0.0040 - 0.0602i
```

Figura 10: Polos de la función de transferencia de la Figura 8

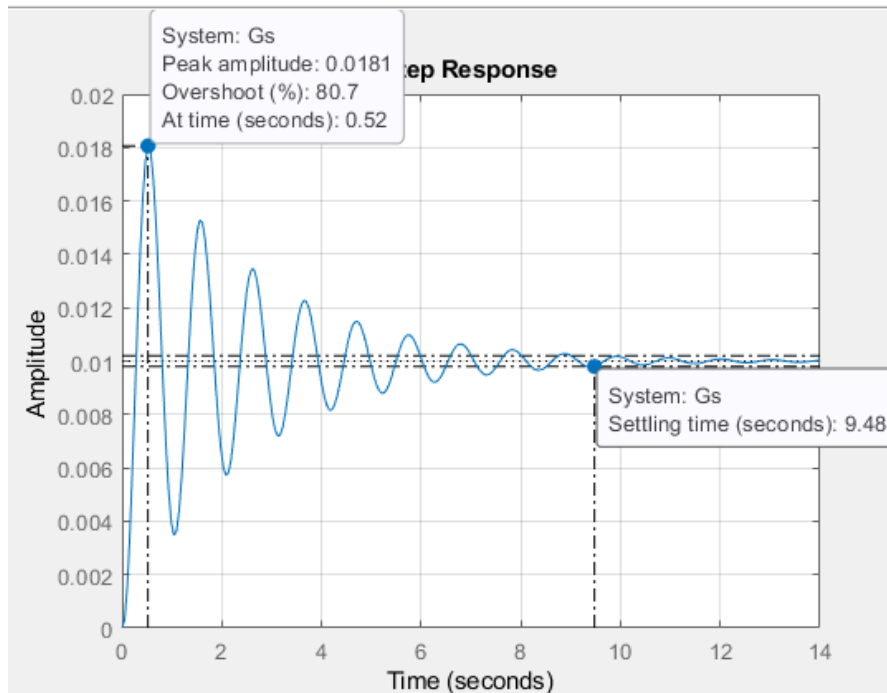


Figura 11: Respuesta a la entrada escalón del sistema obtenido de tercer orden.

## TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

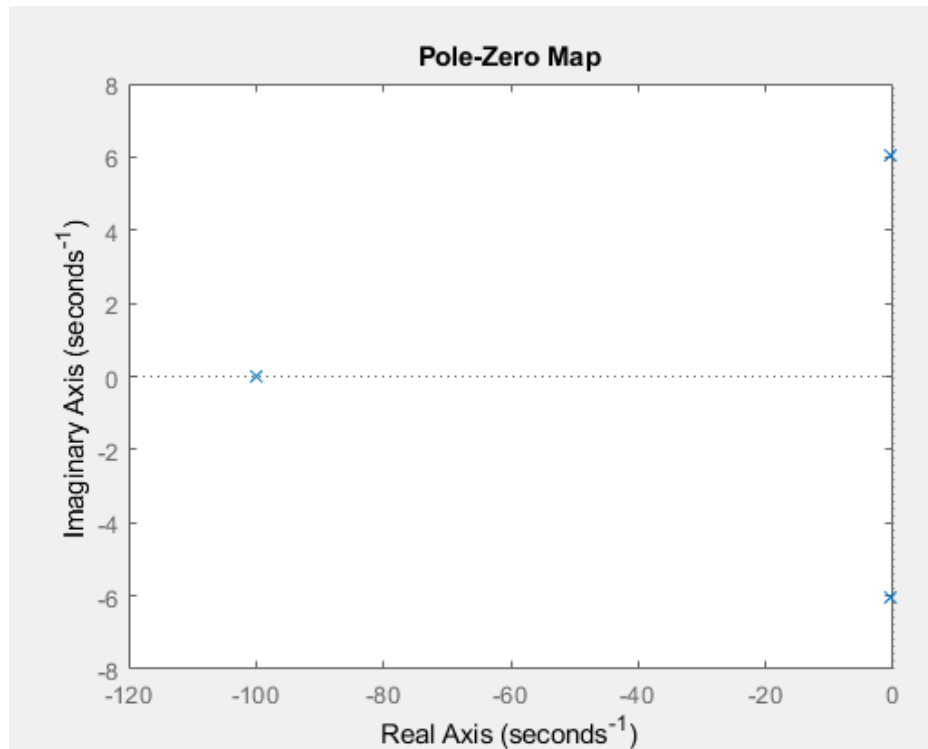


Figura 12: Polos y ceros del sistema obtenido de tercer orden

Por último, debemos obtener un valor en el estacionario de 10, y para ello aplicamos una ganancia al sistema. Dicha ganancia se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{Ganancia} = \frac{\text{Valor estacionario deseado}}{\text{Valor estacionario actual}} = \frac{10}{0.01} = \mathbf{1000}$$

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
59 %% Sistema de tercer orden con un valor del estacionario a 10
60 - syms s;
61 - Gs = 364500 / (10000*s^3 + 1008081*s^2 + 1172600*s + 36450000);
62
63 %% Polos Gs:      -0.4040 + 6.0237i
64 %%              -0.4040 - 6.0237i
65 %%              -100    + 0i
66
67 %% Simplemente aplicamos una ganancia para obtener el valor del estacionario
68 %% frente a la entrada escalon de un valor de 10.
69
70 - VEQ = 10;                %% Valor estacionario querido
71 - VEA = 0.01;             %% Valor estacionario actual
72 - G = VEQ/VEA             %% Ganancia que necesitamos
73
74 %% Con la ganancia obtenida, procedemos a obtener una funcion de
75 %% transferencia.
76
77 - Gs3 = G;                %% No posee ceros o polos
78
79 - Gs = Gs*Gs3;
80 - Gs = collect(simplify(Gs));
81 - Gs = tf(364500000,[10000 1008081 1172600 36450000])
82
83 %% Comprobamos y obtenemos las graficas
84 - figure;
85 - step(Gs);
86 - grid on;
87
88 - stepinfo(Gs)
89 - Polos = pole(Gs)
90
91 - figure;
92 - pzmap(Gs);
93
```

Figura 13: Código usado para obtener la función de tercer orden con las características propuestas, a través del resultado tras usar el código de la Figura 7

```
Gs =
      3.645e08
-----
10000 s^3 + 1.008e06 s^2 + 1.173e06 s + 3.645e07
Continuous-time transfer function.
```

Figura 14: Función de transferencia obtenida del sistema de tercer orden con el valor del estacionario 10.



# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 0.1829  
    SettlingTime: 9.4757  
    SettlingMin: 3.4693  
    SettlingMax: 18.0667  
    Overshoot: 80.6666  
    Undershoot: 0  
    Peak: 18.0667  
    PeakTime: 0.5204
```

Figura 15: Características de la función de transferencia de la Figura 14

Observamos que los valores deseados de tiempo de asentamiento y sobre-elongación siguen dentro de las características pedidas en el enunciado ( $t_s < 10s$  y  $M_p > 80\%$ ) observadas a través de las líneas de códigos.

```
Polos =  
  
1.0e+02 *  
  
-1.0000 + 0.0000i  
-0.0040 + 0.0602i  
-0.0040 - 0.0602i
```

Figura 16: Polos de la función de transferencia de la Figura 14

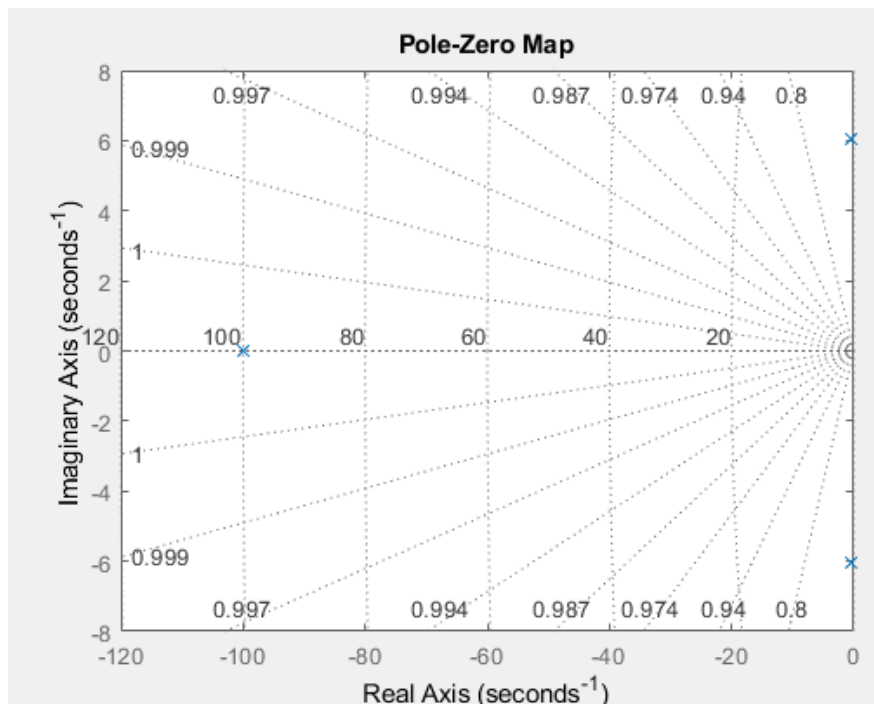


Figura 17: Polos y ceros del sistema obtenido de tercer orden y valor en el estacionario 10.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

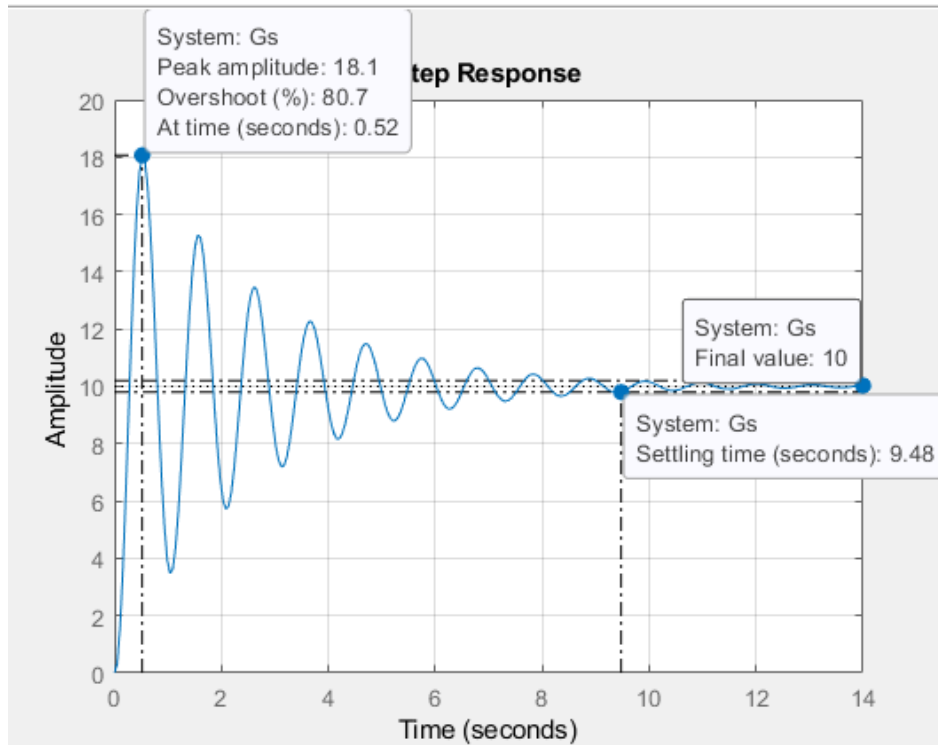


Figura 18: Respuesta a la entrada escalón del sistema obtenido de tercer orden y valor en el estacionario 10.

Podemos observar gráficamente con la respuesta a la entrada escalón, que el porcentaje de sobre-elongación (80.7%) es mayor que el 80%, el tiempo de asentamiento (9.48 s) es menor que 10 s y que el valor en el estacionario (10) es igual a 10.

## TAREA 2:

**Determina el espacio del plano 's' en el que se encuentran los polos de un sistema que tiene una frecuencia superior a 10 rad/s y un tiempo de asentamiento superior a 100 segundos. Proponer un sistema continuo de primer que cumpla las especificaciones elegidas y que en el estacionario, frente a la entrada escalón, alcance un valor de 5. Simular y comprobar que se cumplen las especificaciones del sistema elegido.**

Para empezar, hay que destacar que un sistema de primer orden no posee frecuencia, y el ejercicio no se podría realizar. A continuación, realizare el ejercicio sin tener en cuenta la frecuencia para obtener un sistema de primer orden, y seguidamente realizare el ejercicio con todos los datos pedidos pero siendo un sistema de segundo orden.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

- Sistema de primer orden:

Realizamos el sistema de primer orden teniendo en cuenta el tiempo de asentamiento (mayor de 100 s) y el valor del estacionario frente a la entrada escalón (valor de 5 en el estacionario).

Calculamos el valor de sigma y será el único polo que posee el sistema:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{4}{t_s}$$

```
97 %% Sistema de primer orden
98 - clear all; clc; close all;
99
100 - ts = 105;           % ts > 100 s
101 - sigma = ts/4;
102
103 - k = 5;             % Valor en el estacionario frente a la entrada escalon.
104
105 - Gs = tf(k,[sigma,1])
106
107 - figure;
108 - step(Gs);
109 - stepinfo(Gs)
110 - Polos = pole(Gs)
111 - grid on;
112
113 - figure;
114 - pzmap(Gs);
```

Figura 19: Código usado para obtener la función de primer orden con las características propuestas.

```
Gs =
      5
-----
26.25 s + 1
Continuous-time transfer function.
```

Figura 20: Función de transferencia obtenida del sistema de primer orden.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 57.6714  
    SettlingTime: 102.6920  
    SettlingMin: 4.5225  
    SettlingMax: 4.9999  
    Overshoot: 0  
    Undershoot: 0  
    Peak: 4.9999  
    PeakTime: 276.8283
```

Figura 21: Características de la función de transferencia de la Figura 20.

Vemos que la característica del tiempo de asentamiento (a través de línea de comandos) cumple la condición de ser mayor a 100 segundos.

```
Polos =  
  
-0.0381
```

Figura 22: Polos de la función de transferencia de la Figura 20.

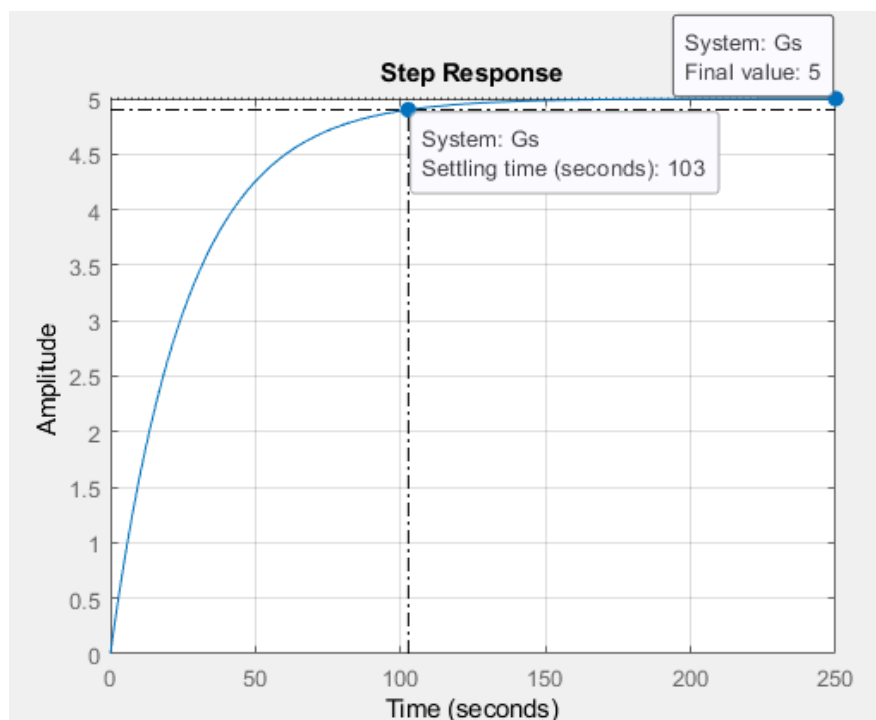


Figura 23: Respuesta a la entrada escalón del sistema obtenido de primer orden.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

También podemos comprobar el tiempo de asentamiento a través de la representación grafica de la función de transferencia.

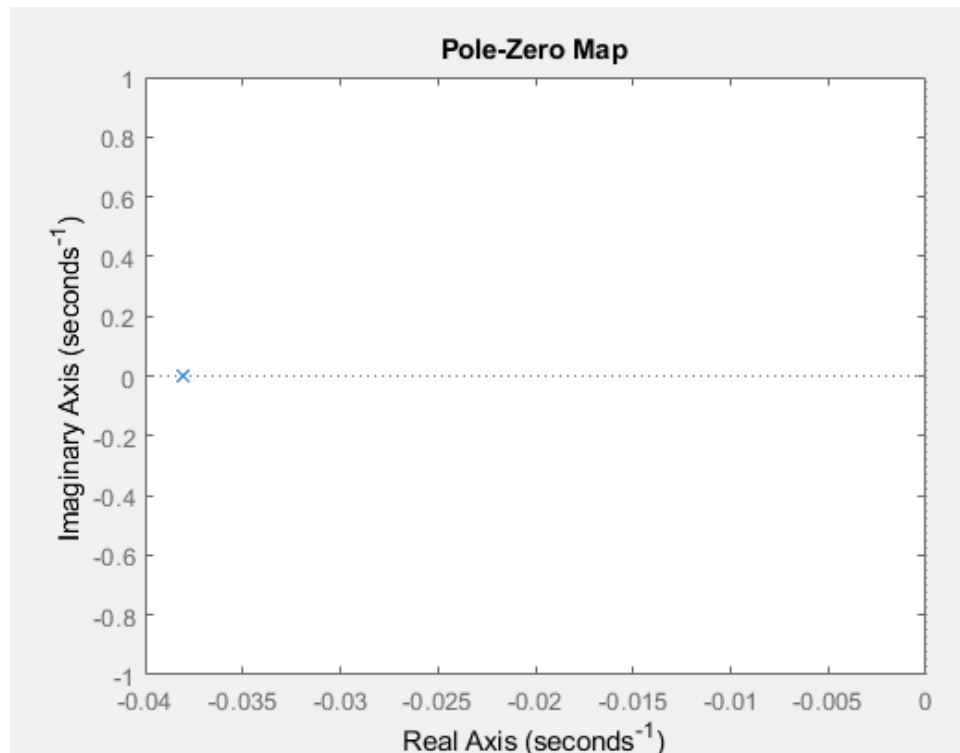


Figura 24: Polos y ceros del sistema obtenido de primer orden.

- Sistema de segundo orden:

En este apartado, tenemos en cuenta todas las características propuestas por el ejercicio, pero tenemos que realizar un sistema de segundo orden para poder obtener una frecuencia a analizar.

En este apartado, tenemos que realizar el cálculo de sigma igual que en el apartado anterior:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{4}{t_s}$$

Una vez obtenido el valor de sigma, debemos crear un polo complejo conjugado, debido a que poseemos el valor real del polo (sigma) y el valor complejo del polo (la frecuencia).

$$s = -\sigma \pm j\omega$$

Ahora, hay que realizar cálculos para obtener la ecuación del denominador de la función de transferencia:

## TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

$$-\sigma \pm j\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \text{Sacamos sistema de ec.} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} -\sigma = \frac{-b}{2a} \\ \pm j\omega = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array} \right\}$$

$$-\sigma = \frac{-b}{2a} \rightarrow -\sigma 2a = -b \rightarrow b = 2a\sigma$$

$$\pm j\omega = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow j\omega = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow -\omega^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\omega^2 = \frac{4a^2\sigma^2 - 4ac}{4a^2} \rightarrow -\omega^2 = \frac{a\sigma^2 - c}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\omega^2 a = a\sigma^2 - c \rightarrow c = a\sigma^2 + \omega^2 a$$

Con estos valores tenemos el denominador del sistema en función de "a", es decir, el denominador de la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{x}{as^2 + 2a\sigma s + (a\sigma^2 + a\omega^2)}$$

Por otro lado, sabemos que el límite de la función de transferencia cuando s tiende a 0, obtendremos el valor del estacionario a la entrada escalón, y en nuestro caso tiene que ser igual a 5:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (G(s)) = \frac{x}{(a\sigma^2 + a\omega^2)} = 5 \rightarrow x = (a\sigma^2 + a\omega^2) * 5$$

Para simplificar el sistema, podemos decir que el valor de a es igual a 1:

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

$$x = (a\sigma^2 + aw^2) * 5 = (\sigma^2 + w^2) * 5$$

Por último, sustituimos los valores de sigma y w que tenemos desde el inicio del ejercicio. Los siguientes cálculos se realizan dentro del código.

```
116 %% Sistema de segundo orden:
117 - clear all; clc; close all;
118
119 - k = 5;      %% Estacionario frente a entrada escalon
120 - w = 11;    %% w > 10 rad/s
121 - ts = 105; %% ts > 100 s
122
123 - sigma = 4/ts;
124
125 %% Creamos los polos buscados:
126
127 %% Polos dominantes:
128 - polo1 = -sigma + w*1i;
129 - polo2 = -sigma - w*1i;
130
131 %% Procedemos a calcular el numerador de Gs:
132 - numerador = (sigma^2 + w^2);
133
134 %% Calculamos Gs y vemos la respuesta frente a la entrada escalon:
135 - Gs = zpk([], [polo1, polo2], numerador*k)
136
137 - figure;
138 - step(Gs);
139 - stepinfo(Gs)
140 - Polos = pole(Gs)
141 - grid on;
142
143 - figure;
144 - pzmap(Gs);
145
146 %% Comprobacion frecuencia del sistema de segundo orden obtenido
147 - t1 = 98.1;
148 - t2 = 98.7;
149 - T = t2-t1;
150 - f = 1/T;
151 - w = 2*pi*f
```

Figura 25: Código usado para obtener la función de segundo orden con las características propuestas.

```
Gs =
      605.01
-----
      (s^2 + 0.07619s + 121)
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Figura 26: Función de transferencia obtenida del sistema de segundo orden.

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 0.0950  
    SettlingTime: 102.5332  
    SettlingMin: 0.1076  
    SettlingMax: 9.9459  
    Overshoot: 98.9179  
    Undershoot: 0  
    Peak: 9.9459  
    PeakTime: 0.2856
```

Figura 27: Características de la función de transferencia de la Figura 26.

Podemos ver que las características de la función de transferencia obtenidas a través de líneas de código, el tiempo de asentamiento cumple la condición proporcionada (>100s).

```
Polos =  
  
-0.0381 +11.0000i  
-0.0381 -11.0000i
```

Figura 28: Polos de la función de transferencia de la Figura 26.

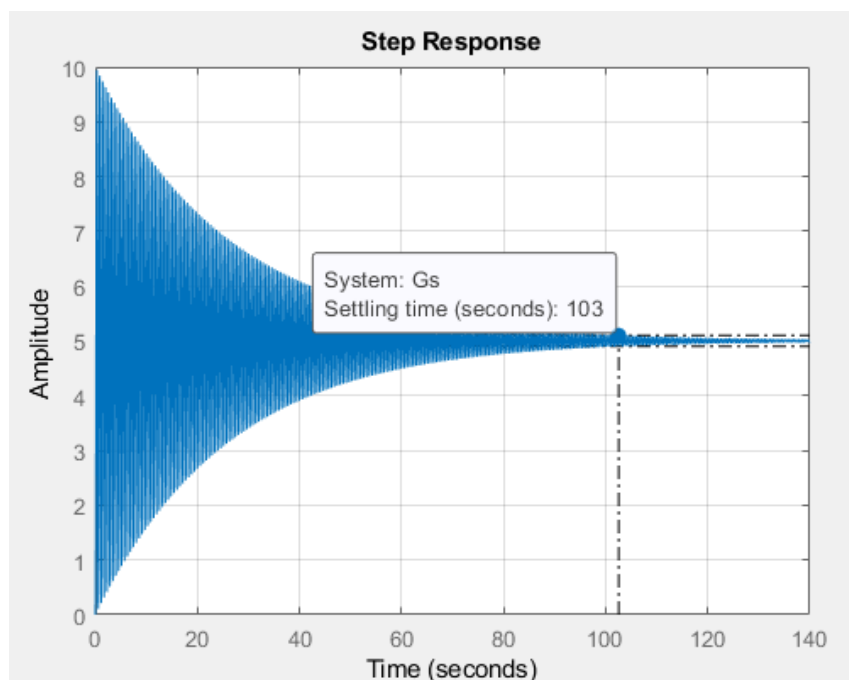


Figura 29: Respuesta a la entrada escalón del sistema obtenido de segundo orden.



## TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

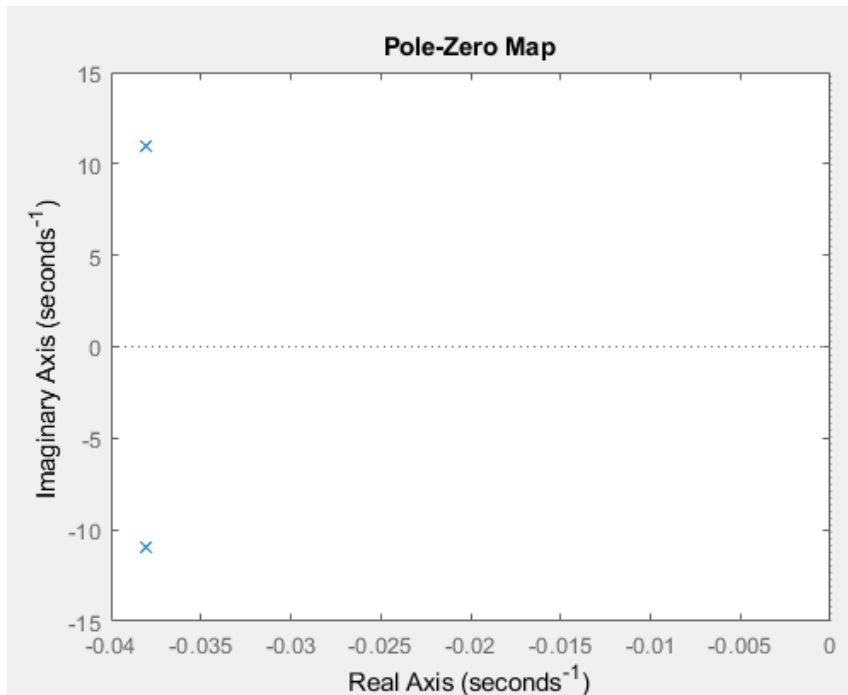


Figura 30: Polos de la función de transferencia de segundo orden.

Ampliamos la gráfica de la *Figura 29* para poder obtener el valor del periodo de la función y comprobar que el valor de la frecuencia está dentro del rango deseado.

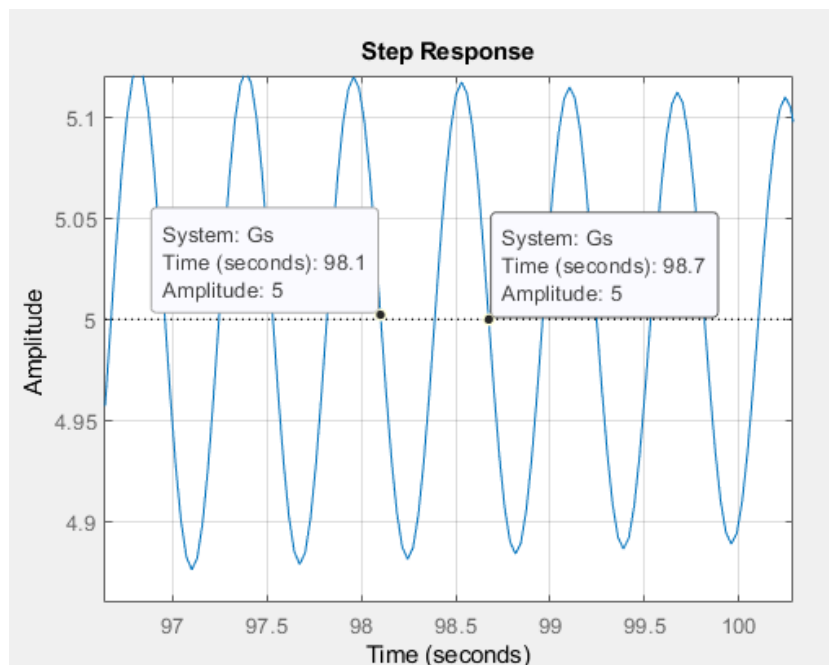


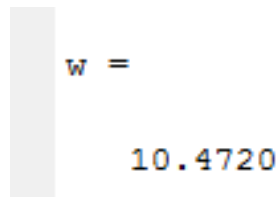
Figura 31: *Figura 29* ampliada

$$T = t_2 - t_1 = 98.7 - 98.1 = 0.6 \text{ s}$$

## TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.6} \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{0.6} = 10.47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



```
omega =  
  
10.4720
```

Figura 32: Mismos cálculos realizados en Matlab

Comprobamos que si cumplen ambas características. El tiempo de asentamiento es 103 s (mayor que 100 s) y que la frecuencia es 10.47 rad/s (mayor que 10 rad/s).

### TAREA 3:

Determina el espacio del plano 's' en el que se encuentran los polos de un sistema que tiene una frecuencia natural inferior a 20 rad/s y un tiempo de pico superior a  $0.1\pi$  segundos. Proponer un sistema discreto de segundo orden que cumpla las especificaciones elegidas y que frente a la entrada escalón alcance un valor de 15. Simular y comprobar que se cumplen las especificaciones del sistema elegido.

```
153 %% TAREA 3  
154 - clc; clear all; close all;  
155  
156 - wn = 15; % Frecuencia natural menor a 20 rad/s.  
157 - tp = 0.2*pi; % Tiempo de pico superior a 0.1*pi segundos.  
158 - k = 15; % Valor en el estacionario.  
159  
160 - w = pi/tp;  
161 - dseta = sqrt(1-((w^2)/(wn^2)));  
162 - sigma = dseta*wn;  
163  
164 % Polos dominantes complejos continuos:  
165 - polo1 = -sigma + w*1i;  
166 - polo2 = -sigma - w*1i;  
167  
168 % Procedemos a calcular el numerador de Gs:  
169 - numerador = (sigma^2 + w^2);  
170  
171 % Funcion de transferencia continua:  
172 - Gs = zpk([], [polo1, polo2], numerador)
```

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```

173
174 - figure;
175 - step(Gs);
176 - grid on;
177
178 % Conversion de polos continuos a polos discretos:
179 - T = (2*pi)/w;
180 - polo1z = exp(T*polo1);
181 - polo2z = exp(T*polo2);
182
183 % Funcion de transferencia continua discretizada:
184 - Gz = zpk([], [polo1z, polo2z], numerador, T);
185
186 % Calculo para el valor del estacionario:
187 - VEA = 225; % Valor Estacionario Actual
188 - VEQ = 15; % Valor Estacionario Querido
189 - Ganancia = VEQ/VEA;
190
191 % Funcion de transferencia continua discretizada con valor estacionario 15:
192 - Gz = zpk([], [polo1z, polo2z], numerador*Ganancia, T);
193
194 - figure;
195 - step(Gz);
196 - stepinfo(Gz)
197 - grid on;
198
199 - Polos = pole(Gz)

```

Figura 33: Código usado para la realización de la tarea

Para empezar, procedo a obtener la función de transferencia continua y después discretizar la función de transferencia.

Procedemos obtener el valor de “w” a partir del tiempo de pico proporcionado:

$$t_p = \frac{\pi}{w} \rightarrow w = \frac{\pi}{t_p}$$

Con el valor de “w”, podemos calcular el valor de  $\zeta$  de la siguiente manera:

$$s = -\sigma \pm jw = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \rightarrow \text{Sistema de ec.} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} -\sigma = -\zeta w_n \\ \pm jw = \pm w_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{array} \right\}$$

$$jw = w_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \rightarrow -w^2 = w_n^2 (\zeta^2 - 1) \rightarrow -\frac{w^2}{w_n^2} = \zeta^2 - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \zeta^2 = 1 - \frac{w^2}{w_n^2} \rightarrow \zeta = \sqrt{1 - \frac{w^2}{w_n^2}}$$

## TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

Ahora que ya tenemos el valor de  $\zeta$ , podemos obtener el valor del polo complejo conjugado que pertenece al sistema de segundo orden continuo con las características deseadas en el enunciado.

Se puede calcular porque aparte de  $\zeta$ , el valor de  $\omega_n$  (frecuencia natural) nos lo proporciona el enunciado.

$$s = -\sigma \pm j\omega = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Ahora con los polos podemos calcular la función de transferencia continua obteniendo la siguiente:

```
Gs =  
  
      225  
-----  
(s^2 + 28.28s + 225)  
  
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Figura 34: Función de transferencia continua de segundo orden

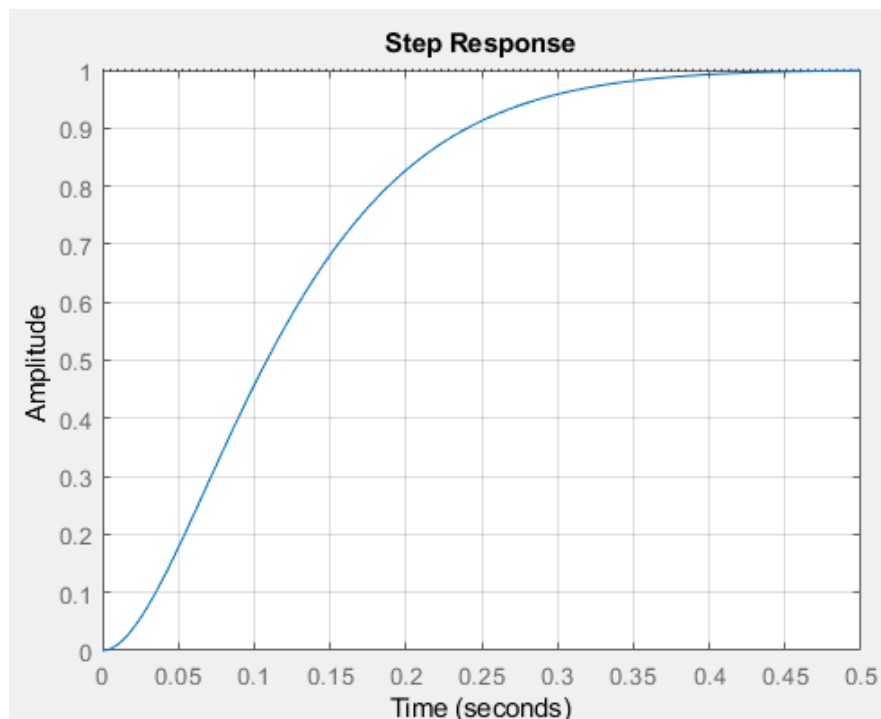


Figura 35: Representación grafica de la función de transferencia de la Figura 34 con entrada escalón

Ahora debemos discretizar la función de transferencia de la Figura 34, y para pasar un polo continuo a un polo discreto, debemos realizar la siguiente transformación:

$$z = e^{Ts}$$

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

Como ya tenemos los polos continuos, simplemente indicamos por línea de comando que haga esa operación para cada uno de los polos del complejo conjugado continuo.

```
Gz =  
  
      225  
-----  
(z-1.914e-08)^2  
  
Sample time: 1.2566 seconds  
Discrete-time zero/pole/gain model.
```

Figura 36: Función de transferencia de la Figura 34 discretizada

Después de obtener la función de transferencia discretizada, procedemos a calcular el valor en el estacionario con el límite de  $G(z)$  cuando  $z$  tiende a 1:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (G(z)) &= \frac{225}{(z - 1.914 \cdot 10^{-8})^2} = \frac{225}{(1 - 1.914 \cdot 10^{-8})^2} \approx \\ &\approx \frac{225}{(0.9999)^2} \approx \frac{225}{0.9999} \approx \mathbf{225} \end{aligned}$$

Con el valor del estacionario de la función de transferencia, calculamos la ganancia que tenemos que aplicar para obtener un valor en el estacionario igual a 15.

$$225 * \text{Ganancia} = 15 \rightarrow \text{Ganancia} = \frac{15}{225} \approx \mathbf{0.0667}$$

Con el valor de la ganancia, calculamos la función de transferencia discreta de segundo orden y valor en el estacionario 15.

```
Gz =  
  
      15  
-----  
(z-1.914e-08)^2  
  
Sample time: 1.2566 seconds  
Discrete-time zero/pole/gain model.
```

Figura 37: Función de transferencia discreta de segundo orden y valor en el estacionario 15

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
Polos =  
  
1.0e-07 *  
  
0.1914 - 0.0000i  
0.1914 + 0.0000i
```

Figura 38: Polos de la función de transferencia de la Figura 37

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
RiseTime: 0  
SettlingTime: 2.5133  
SettlingMin: 15.0000  
SettlingMax: 15.0000  
Overshoot: 0  
Undershoot: 0  
Peak: 15.0000  
PeakTime: 5.0265
```

Figura 39: Características de la función de transferencia de la Figura 37 con entrada escalón

Vemos que el tiempo de pico cumple la condición indicada ( $> 0.1\pi = 0.314$ ) con un valor de 5.0265.

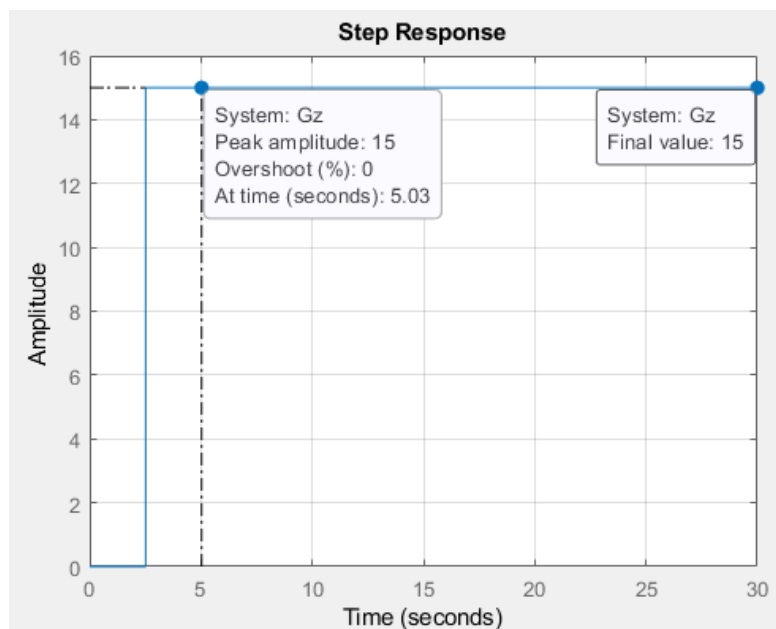


Figura 40: Representación grafica de la función de transferencia de la Figura 37 con entrada escalón.

Vemos que el tiempo de pico concuerda con el tiempo de pico obtenido por línea de comando (Figura 39) y que el valor en el estacionario es el buscado con valor 15.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

## TAREA 4:

Determinar un sistema de primer orden que tenga un tiempo de asentamiento superior a 40 segundos, que presente un comportamiento de filtro paso alto y que en el estacionario, frente a la entrada escalón, alcance un valor de 20. Simular y comprobar que se cumplen las especificaciones del sistema elegido.

**AYUDA:** No hay que utilizar los filtros continuos habituales (Butterworth, Eliptico, etc), sino obtener el comportamiento en frecuencia deseada a partir de la disposición de los polos y los ceros del sistema.

```
201 %% TAREA 4
202 - clc; clear all; close all;
203
204 - ts = 45;           % ts > 40 s
205 - sigma = ts/4;
206 - k = 20;           % Valor en el estacionario frente a la entrada escalon.
207
208 - Gs = tf(1,[sigma,1])
209
210 - figure;
211 - step(Gs);
212 - stepinfo(Gs)
213 - Polos = pole(Gs)
214 - grid on;
215
216 % Introducir un cero para crear el Filpro Paso Alto
217 - Gs = tf(1,[11.25 1]);
218 - Cero = tf([1 0],1);           % Cero en el origen: s = 0
219
220 - Gs = Gs*Cero
221
222 - figure;
223 - step(Gs);
224 - stepinfo(Gs)
225 - Polos = pole(Gs)
226 - Ceros = zero(Gs)
227 - grid on;
228
229 - figure;
230 - bode(Gs);
231 - grid on;
```

Figura 41: Código usado para la realización de la tarea 4.

Primero comenzamos calculando una función de transferencia de primer orden con las características proporcionadas por el enunciado.

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{4}{t_s}$$

```
Gs =  
  
      1  
-----  
11.25 s + 1  
  
Continuous-time transfer function.
```

Figura 42: Función de transferencia de primer orden

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
      RiseTime: 24.7163  
      SettlingTime: 44.0108  
      SettlingMin: 0.9045  
      SettlingMax: 1.0000  
      Overshoot: 0  
      Undershoot: 0  
      Peak: 1.0000  
      PeakTime: 118.6407
```

Figura 43: Características de la función de transferencia de la Figura 42.

```
Polos =  
  
-0.0889
```

Figura 44: Polos de la función de transferencia de la Figura 42.



# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

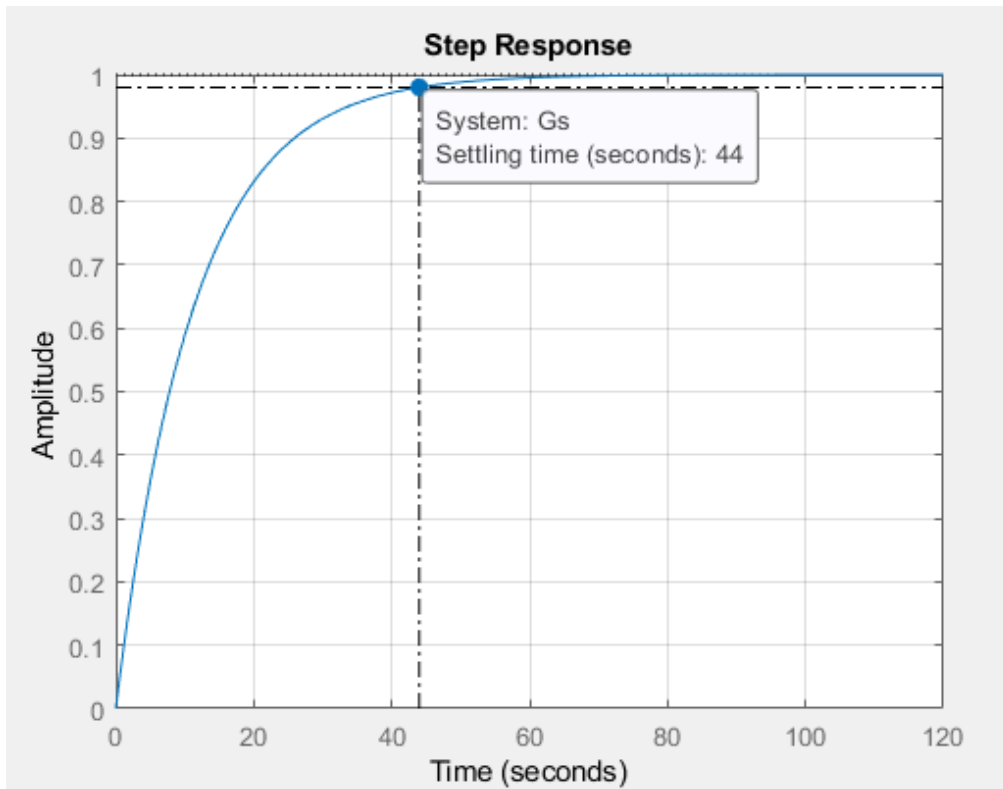


Figura 45: Representación gráfica de la función de transferencia de la Figura 42 a la entrada escalón.

Al ser un sistema de primer orden, la función de transferencia posee un polo y para obtener un filtro paso alto necesitamos que la función tenga un cero también.

Debemos tener un cero y un polo en la función de transferencia debido a que hay que observar en el diagrama de bode una pendiente de 20 dB/Decada (proporcionado por el cero) y después pendiente 0 dB/Decada (la pendiente se anula por el polo). Podemos introducir un cero en el origen para poder tener una pendiente de 20 dB/Decada desde el inicio hasta que aparezca el polo y anule la pendiente.

```
Gs =  
  
      s  
-----  
11.25 s + 1  
  
Continuous-time transfer function.
```

Figura 46: Función de transferencia de primer orden después de añadir un cero en el origen

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 24.7163  
    SettlingTime: 44.0108  
    SettlingMin: 2.3380e-06  
    SettlingMax: 0.0085  
    Overshoot: Inf  
    Undershoot: 0  
    Peak: 0.0889  
    PeakTime: 0
```

Figura 47: Características de la función de transferencia de la Figura 46.

```
Polos =  
  
    -0.0889  
  
Ceros =  
  
    0
```

Figura 48: Polos y ceros de la función de transferencia de la Figura 46.

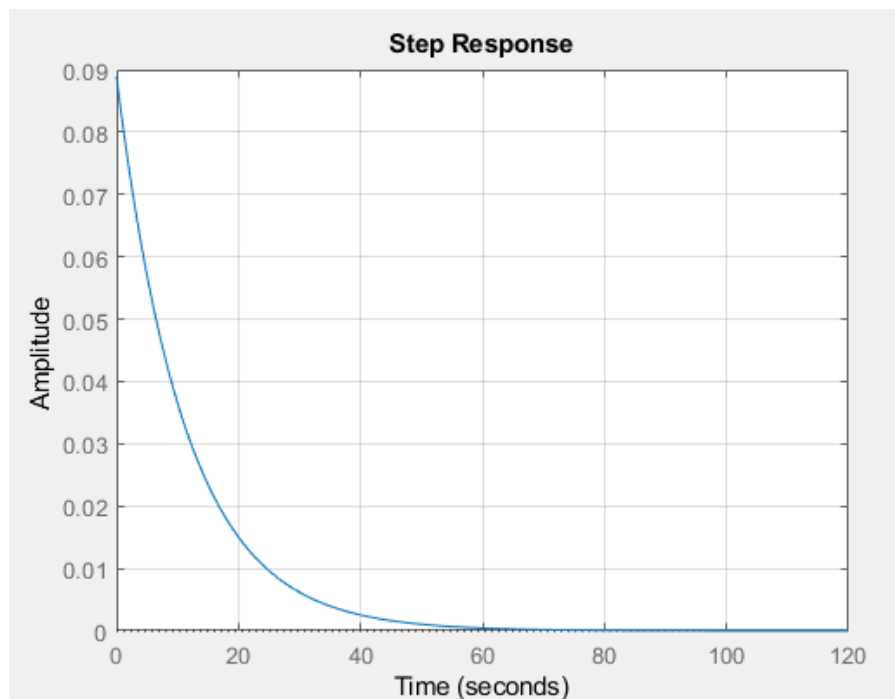


Figura 49: Representación gráfica de la función de transferencia de la Figura 46 a la entrada escalón.

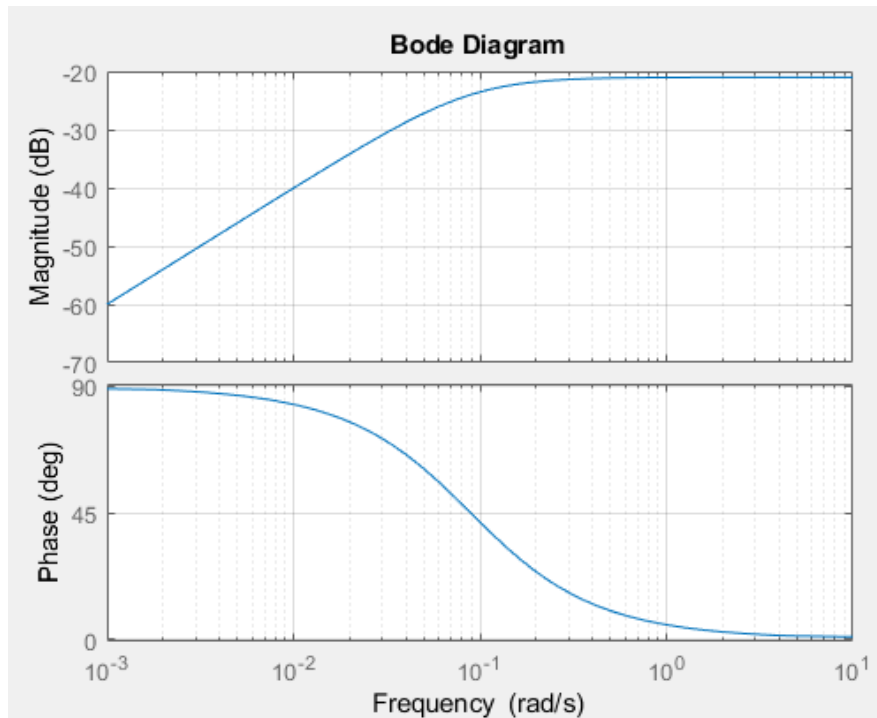


Figura 50: Diagrama de bode de la función de transferencia de la Figura 46.

La Figura 50 muestra el diagrama de bode que identifica al diagrama de bode de un filtro paso alto, y es a su vez el diagrama de bode de la función de transferencia de la Figura 46.

Seguidamente debemos obtener un valor en el estacionario igual a 20, pero no será posible obtener dicho valor independientemente del valor de la ganancia que apliquemos porque el límite cuando  $s$  tiende a 0 de la función de transferencia de la Figura 46 obtenemos una indeterminación del tipo 0/1.

$$\lim_{s=0}(G(s)) = \lim_{s=0} \left( \frac{s}{11.25 * s + 1} \right) = \frac{0}{0 + 1} = \frac{0}{1}$$

Este resultado del límite implica que el valor del estacionario es 0 y el valor del estacionario no se altera independientemente del valor de la ganancia que apliquemos.

Otra opción que podemos pensar, es cambiar la posición del cero para obtener el siguiente resultado:

$$G(s) = \frac{s + 20}{11.25 * s + 1}$$

$$\lim_{s=0}(G(s)) = \lim_{s=0} \left( \frac{s + 20}{11.25 * s + 1} \right) = \frac{0 + 20}{0 + 1} = \frac{20}{1} = 20$$

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

Este método, sí obtiene una ganancia de 20 pero no representa un filtro paso alto debido a que el cero debe ser mayor que el polo, es decir, el cero ha de estar entre el polo y el origen para en el diagrama de bode primero aumente la pendiente de 0dB/Decada a 20dB/Decada (a causa del cero) y seguidamente el polo restablezca la pendiente de 20 dB/Decada a 0 dB/Decada (a causa del polo).

## TAREA 5:

**Determinar un sistema de segundo orden que tenga un tiempo de asentamiento de 15 segundos y que se comporte como un filtro supresor de banda.**

**AYUDA:** No hay que utilizar los filtros continuos habituales (Butterworth, Eliptico, etc), sino obtener el comportamiento en frecuencia deseada a partir de la disposición de los polos y los ceros del sistema.

Para este apartado, la funcion de transferencia debe tener 2 polos y un cero doble, la razón es la siguiente:

Para empezar, el diagrama de bode debe tener una pendiente 0 y a causa de un polo pasar a tener una pendiente de -20. Seguidamente se debe encontrar el cero doble debido a que la pendiente debe pasar de -20 a 20, y el cero doble es lo que aplica al diagrama de bode. Por último, el ultimo polo de la función de transferencia, consigue que la pendiente de 20 pase a ser 0 nuevamente.

Cabe destacar que la pendiente tiene como unidades dB/Decada.

Para obtener una función de transferencia con un tiempo de asentamiento de 15 segundos, debemos calcular un polo dominante a través del tiempo de asentamiento proporcionado.

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{4}{t_s}$$

Obtenemos una función de transferencia de primer orden con el tiempo de asentamiento 15 segundos:

```
Gs =  
  
      1  
-----  
3.75 s + 1  
  
Continuous-time transfer function.
```

Figura 51: Función de transferencia de primer orden con tiempo de asentamiento igual a 15 segundos.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 8.2388  
    SettlingTime: 14.6703  
    SettlingMin: 0.9045  
    SettlingMax: 1.0000  
    Overshoot: 0  
    Undershoot: 0  
    Peak: 1.0000  
    PeakTime: 39.5469
```

Figura 52: Características de la función de transferencia de la Figura 51.

```
Polos =  
  
-0.2667
```

Figura 53: Polos de la función de transferencia de la Figura 51.

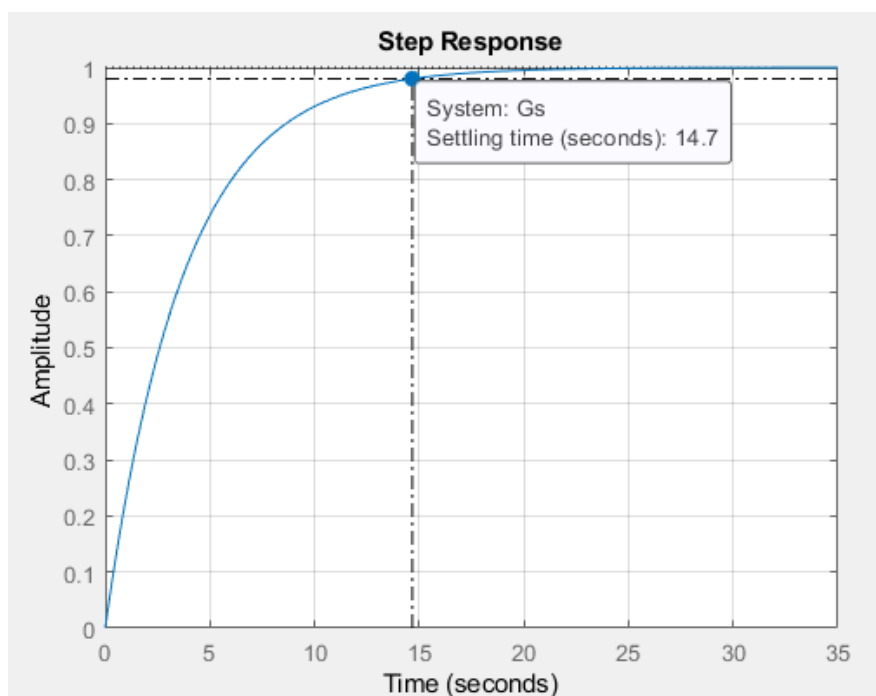


Figura 54: Representación grafica de la función de transferencia de la Figura 51 con la entrada escalón.

El siguiente paso es introducir un polo no dominante, es decir, un polo alejado del origen y del polo anteriormente mencionado. En este caso escogemos el polo -20.

$$G_s = \frac{1}{3.75 s^2 + 76 s + 20}$$

Continuous-time transfer function.

Figura 55: Función de transferencia con dos polos derivada de la Figura 51.

Ahora poseemos una función de transferencia de segundo orden con 2 polos y 0 ceros. Sabiendo esto, el siguiente paso es introducir el cero doble anteriormente indicado para poder obtener la función de transferencia del filtro supresor de banda deseado.

El cero doble introducido se encuentra equidistante a los dos polos que ya posee la función de transferencia:

$$\text{Polo dominante} = -0.2667$$

$$\text{Polo no dominante} = -20$$

$$\begin{aligned} \text{Distancia} &= \frac{|\text{Polo no dominante}| - |\text{Polo dominante}|}{2} = \\ &= \frac{20 - 0.2667}{2} = \frac{19.7333}{2} = 9.8667 \end{aligned}$$

$$\text{Cero doble} = s^2 + 9.8667$$

El cero doble que hemos creado, esta equidistante a los dos polos anteriores, y al introducirlo en la función de transferencia, obtenemos la siguiente función que es la función de transferencia final:

```
Gs =  
  
      s^2 + 97.35  
-----  
3.75 s^2 + 76 s + 20  
  
Continuous-time transfer function.
```

Figura 56: Función de transferencia de 2 polos y 2 ceros derivada de la Figura 55.

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 8.2400  
    SettlingTime: 14.8513  
    SettlingMin: 4.4173  
    SettlingMax: 4.8643  
    Overshoot: 0  
    Undershoot: 0  
    Peak: 4.8643  
    PeakTime: 27.4583
```

Figura 57: Características de la función de transferencia de la Figura 56 con entrada escalón.

```
Polos =  
  
-20.0000  
-0.2667  
  
Ceros =  
  
0.0000 + 9.8667i  
0.0000 - 9.8667i
```

Figura 58: Polos y ceros de la función de transferencia de la Figura 56.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

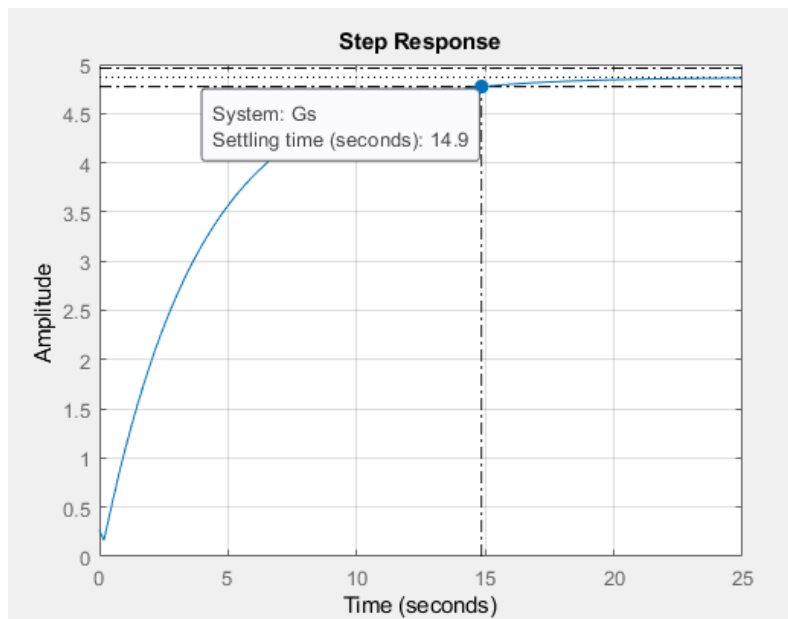


Figura 59: Representación grafica de la función de transferencia de la Figura 56 con la entrada escalón.

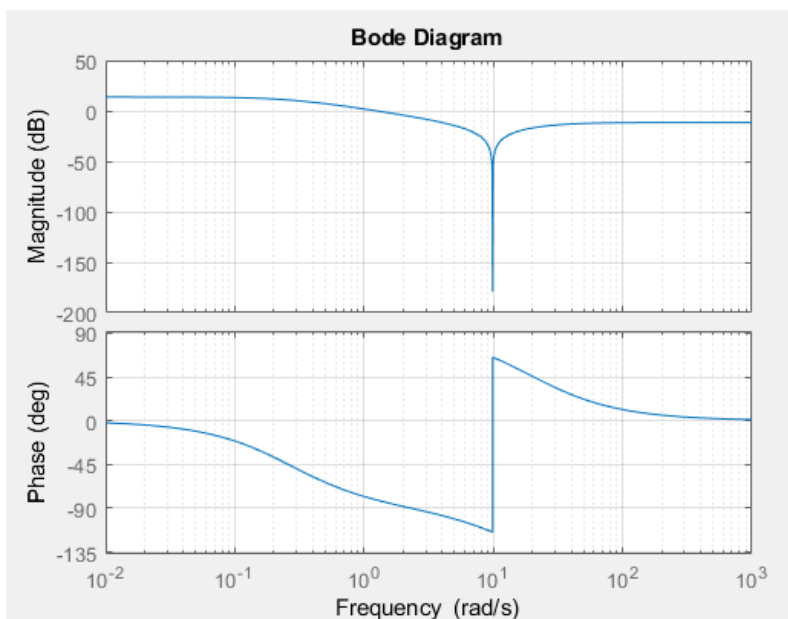


Figura 60: Diagrama de bode de la función de transferencia de la Figura 56.

Podemos observar que el tiempo de asentamiento es 14.9 segundos (aproximadamente 15 segundos) tal y como el enunciado nos indicaba, y que el diagrama de bode representa el filtro supresor de banda como indica la teoría del funcionamiento del filtro.



# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
233 %% TAREA 5
234 - clc; clear all; close all;
235
236 - ts = 15; % ts = 15 s
237 - sigma = ts/4;
238
239 - Gs = tf(1,[sigma,1])
240
241 - figure;
242 - step(Gs);
243 - stepinfo(Gs)
244 - Polos = pole(Gs)
245 - grid on;
246
247 % Introducimos un polo no dominante
248 - Gs = tf(1,[3.75 1]);
249 - Polo2 = tf(1,[1 20]);
250
251 - Gs = Gs*Polo2
252
253 % Introducir un cero doble no dominante
254 - Polo1 = -0.2667;
255 - Polo2 = -20;
256 - CeroDoble = (Polo2-Polo1)/2; % Cero doble en la mitad entre los
257 % dos polos.
258 - CeroDoble = tf([1 0 CeroDoble^2],1);
259 - Gs = Gs*CeroDoble
260
261 % Representacion grafica de la funcion de transferencia final
262 - figure;
263 - step(Gs);
264 - stepinfo(Gs)
265 - Polos = pole(Gs)
266 - Ceros = zero(Gs)
267 - grid on;
268
269 % Diagrama de bode de la funcion de transferencia final
270 - figure;
271 - bode(Gs);
272 - grid on;
```

Figura 61: Código usado para realizar la tarea 5.

## TAREA 6:

Determinar las zonas del espacio 'z' que toman valores de tiempo de asentamiento constante, sobre-elongación constante, tiempo de pico constante. Teniendo en cuenta esos valores, diseñar un sistema que cumpla las constantes que el alumno considere adecuadas.

```
274 %% TAREA 6
275 - clc; clear all; close all;
276
277 - dseta = 0.1; % 0 < dseta < 1
278 - Mp = exp(-(dseta*pi)/(sqrt(1-dseta^2)))
279
280 - ts = 40 % ts = 40 segundos
```

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
281 - sigma = 4/ts;
282 - wn = sigma/dseta;
283 - w = wn*sqrt(1-dseta^2);
284 - tp = pi/w
285
286 % Polos
287 - polo1 = -sigma + w*1i;
288 - polo2 = -sigma - w*1i;
289
290 % Calcular el numerador de Gs:
291 - numerador = (sigma^2 + w^2);
292
293 % Funcion de transferencia continua:
294 - Gs = zpk([], [polo1, polo2], 1)
295
296 - figure;
297 - step(Gs);
298 - stepinfo(Gs)
299 - Polos = pole(Gs)
300 - grid on;
301
302 % Conversion de polos continuos a polos discretos:
303 - T = (2*pi)/w;
304 - polo1z = exp(T*polo1);
305 - polo2z = exp(T*polo2);
306
307 % Funcion de transferencia continua discretizada:
308 - Gz = zpk([], [polo1z, polo2z], 1, T)
309
310 - figure;
311 - step(Gz);
312 - stepinfo(Gz)
313 - Polos = pole(Gz)
314 - grid on;
```

Figura 62: Código usado para la realización de la tarea 6

Para empezar, sabemos que tenemos que tener el tiempo de asentamiento ( $t_s$ ), tiempo de pico ( $t_p$ ) y sobre-elongación ( $M_p$ ) han de ser constantes, y dichas constantes poseen las siguientes formulas.

$$t_s = \frac{4}{\sigma} \qquad M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad t_p = \frac{\pi}{w}$$

Podemos observar que para empezar, podemos obtener el valor de la sobre-elongación con un valor de  $\zeta$  que nosotros escojamos pero siempre dentro del rango  $0 < \zeta < 1$ . Escogemos  $\zeta = 0.1$

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{0.1*\pi}{\sqrt{1-0.1^2}}} = e^{-\frac{0.314}{\sqrt{0.99}}} = e^{-0.3157} = 0.7292$$

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

Obtenemos un valor de sobre-elongación igual a 72.92 %.

El siguiente valor que debemos establecer nosotros, es el tiempo de asentamiento, debido a que, con este tiempo calculamos  $\sigma$ , que a su vez, con  $\sigma$  y  $\zeta$  podemos calcular el tiempo de pico.

Suponemos un tiempo de asentamiento de 40 segundos.

$$t_s = 40 \text{ s} = \frac{4}{\sigma} \rightarrow \sigma = \frac{4}{40} = \mathbf{0.1}$$

$$s = -\sigma \pm jw = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\sigma = \zeta * w_n \rightarrow w_n = \frac{\sigma}{\zeta} = \frac{0.1}{0.1} = \mathbf{1}$$

$$jw = w_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \rightarrow -w^2 = w_n^2 (\zeta^2 - 1) = w_n^2 \zeta^2 - w_n^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow w^2 = w_n^2 - w_n^2 \zeta^2 = w_n^2 (1 - \zeta^2) \rightarrow w = w_n \sqrt{1 - \zeta^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow w = \mathbf{0.9949}$$

$$t_p = \frac{\pi}{w} = \mathbf{3.1574}$$

Ya realizados estos cálculos, podemos obtener los polos de la función de transferencia continua de segundo orden, y podemos obtener la representación gráfica a la entrada escalón.

```
Gs =  
  
      1  
-----  
(s^2 + 0.2s + 1)  
  
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

Figura 63: Función de transferencia continua de segundo orden obtenida tras los cálculos

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 1.1272  
    SettlingTime: 38.3730  
    SettlingMin: 0.4685  
    SettlingMax: 1.7292  
    Overshoot: 72.9156  
    Undershoot: 0  
    Peak: 1.7292  
    PeakTime: 3.1416
```

Figura 64: Características de la función de transferencia de la Figura 63.

```
Polos =  
  
-0.1000 + 0.9950i  
-0.1000 - 0.9950i
```

Figura 65: Polos de la función de transferencia de la Figura 63.

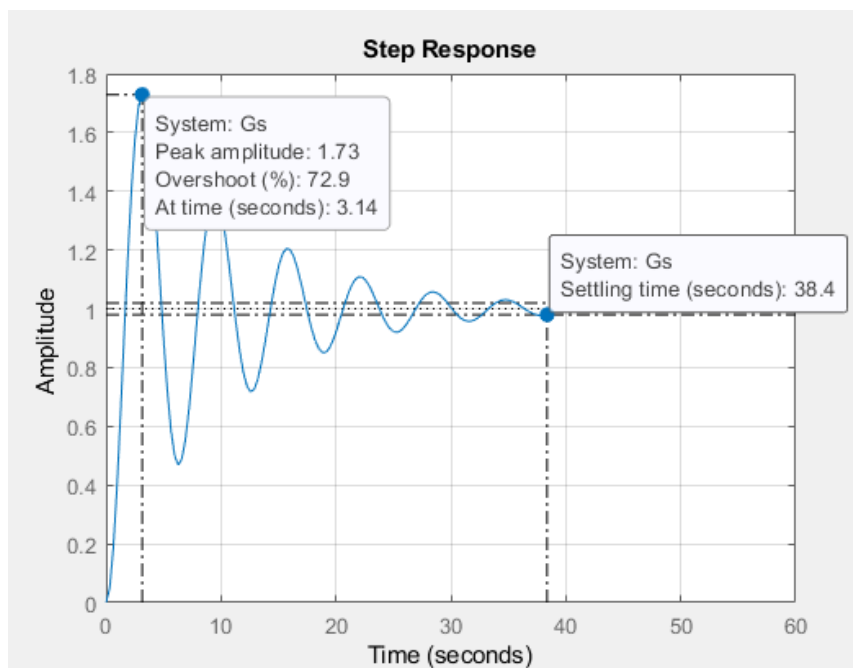


Figura 66: Representación grafica de la función de transferencia de la Figura 63 con la entrada escalón.

Podemos observar que hemos creado una función de transferencia continua con las características antes mencionadas.

El siguiente paso es transformar esta función continua en una función de transferencia discreta.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

Para obtener la función de transferencia discreta, aplicamos la siguiente transformación a los polos continuos:

$$z = e^{Ts}$$

```
Gz =  
  
      1  
-----  
(z-0.5318)^2  
  
Sample time: 6.3148 seconds  
Discrete-time zero/pole/gain model.
```

Figura 67: Función de transferencia de la *Figura 63* discretizada

```
ans =  
  
struct with fields:  
  
    RiseTime: 31.5742  
    SettlingTime: 63.1484  
    SettlingMin: 4.1688  
    SettlingMax: 4.5619  
    Overshoot: 0  
    Undershoot: 0  
    Peak: 4.5619  
    PeakTime: 404.1497
```

Figura 68: Características de la función de transferencia de la *Figura 67*.

```
Polos =  
  
    0.5318 - 0.0000i  
    0.5318 + 0.0000i
```

Figura 69: Polos de la función de transferencia de la *Figura 67*.

# TEC 1: Respuesta transitoria y en frecuencia

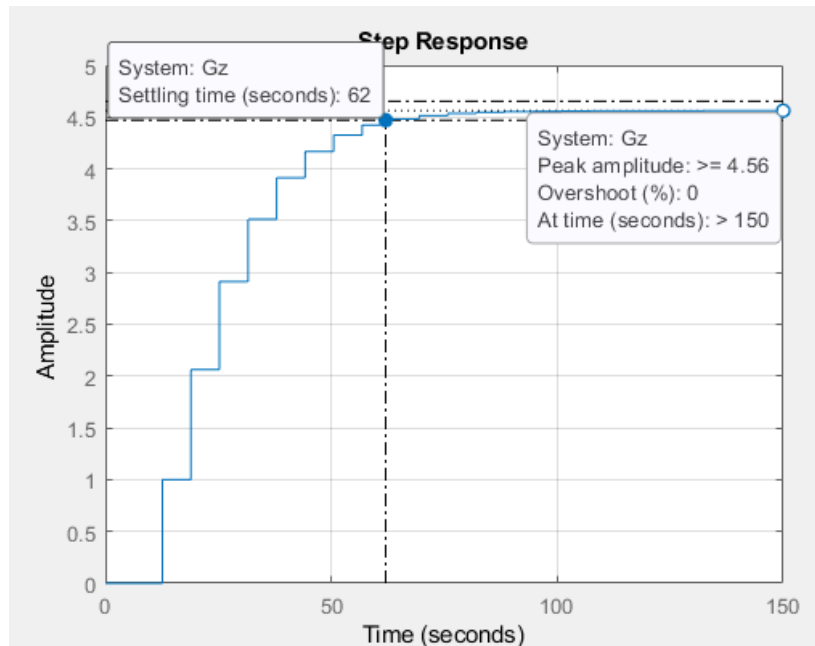


Figura 70: Representación gráfica de la Figura 67 a la entrada escalón.

```
274 %% TAREA 6
275 clc; clear all; close all;
276
277 dseta = 0.1; % 0 < dseta < 1
278 Mp = exp(-(dseta*pi)/(sqrt(1-dseta^2)))
279
280 ts = 40 % ts = 40 segundos
281 sigma = 4/ts;
282 wn = sigma/dseta;
283 w = wn*sqrt(1-dseta^2);
284 tp = pi/w
285
286 % Polos
287 polo1 = -sigma + w*i;
288 polo2 = -sigma - w*i;
289
290 % Calcular el numerador de Gs:
291 numerador = (sigma^2 + w^2);
292
293 % Funcion de transferencia continua:
294 Gs = zpk([], [polo1, polo2], 1)
295
296 figure;
297 step(Gs);
298 stepinfo(Gs)
299 Polos = pole(Gs)
300 grid on;
301
302 % Conversion de polos continuos a polos discretos:
303 T = (2*pi)/w;
304 polo1z = exp(T*polo1);
305 polo2z = exp(T*polo2);
306
307 % Funcion de transferencia continua discretizada:
308 Gz = zpk([], [polo1z, polo2z], 1, T)
309
310 figure;
311 step(Gz);
312 stepinfo(Gz)
313 Polos = pole(Gz)
314 grid on;
```

Figura 71: Código usado para la tarea 6.